

Introdução ao estudo das funções: Classificação e determinação de Domínio e Imagem

Teoria

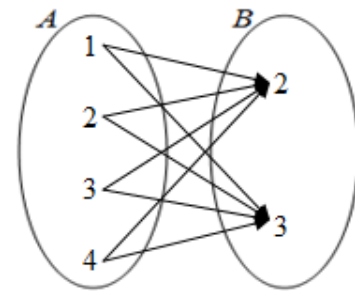
Produto cartesiano

É a multiplicação entre pares ordenados envolvendo conjuntos distintos. Por exemplo, temos o conjunto A, formado pelos seguintes pares ordenados: {1, 2, 3, 4}, e o conjunto B, formado pelos elementos {2, 3}; o produto entre eles será o resultado de $A \times B$, considerando que nos pares ordenados, formados pelo produto, a ordem seja a seguinte:

Os elementos de A devem assumir a posição da abscissa, e os elementos de B da ordenada. Portanto, temos que $A \times B$ é dado por:

$\{(1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3); (3, 2); (3, 3); (4, 2); (4, 3)\}$

representação por extenso



Descomplica ©

representação via diagrama de flechas

Também podemos realizar o produto de $B \times A$ e verificar que os pares formados são diferentes, concluindo que $A \times B \neq B \times A$.

Observe que $B \times A = \{(2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4)\}$.

Note que temos a formação de 8 pares ordenados nas duas multiplicações. Isso decorre do fato de que o conjunto A é formado por 4 elementos, e o conjunto B por 2 elementos, além de que todo elemento de A se associa com todo elemento de B. Assim, constituímos a multiplicação: $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

Obs.: o símbolo n, usado acima, deve ser lido como "número de elementos do conjunto".

Definição de função

Função é uma relação entre dois conjuntos que transforma elementos de um conjunto em elementos de outro. Por exemplo, quando dizemos que os valores de um dado conjunto **sempre** dobram, isso é uma lei, que matematicamente escrevemos como $f(x) = 2x$. Podemos representar uma função de forma genérica como:

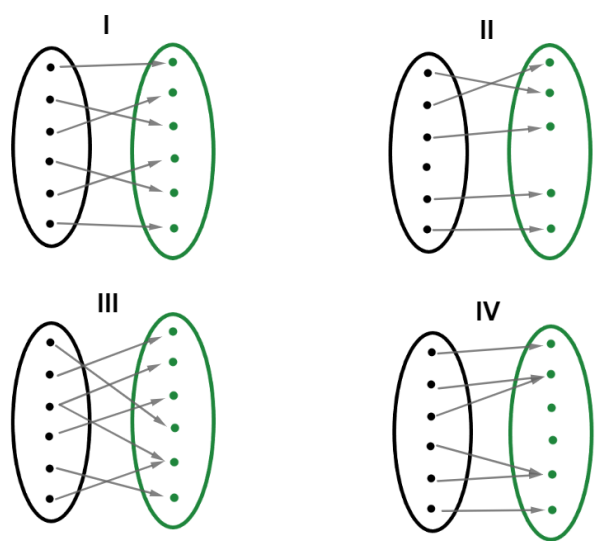
$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Ou seja, cada função associa os elementos do conjunto A a elementos do conjunto B, de modo que cada elemento $x \in A$ corresponde a **um único** $y \in B$.

Logo, todos os elementos do conjunto A devem corresponder a um elemento do conjunto B, não podendo corresponder a mais de um. Podem existir elementos no conjunto B que não estão associados a nenhum elemento do conjunto A.

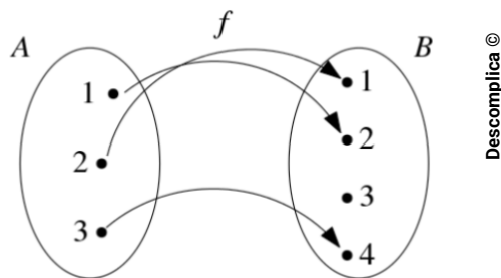
Vejamos algumas relações entre o conjunto preto e o conjunto verde a fim de determinar se são ou não funções:



Descomplica ©

- I. É função, pois cada elemento do conjunto preto corresponde a um único elemento do conjunto verde.
- II. Não é função, pois existe um elemento do conjunto preto que não corresponde a nenhum elemento do conjunto verde.
- III. Não é função, pois existe um elemento do conjunto preto que se relaciona com mais de um elemento do conjunto verde.
- IV. É função, pois cada elemento do conjunto preto corresponde a um único elemento do conjunto verde.

Domínio, Contradomínio e Imagem



O conjunto A é denominado **domínio da função**, também chamado de conjunto de partida. E o conjunto B é denominado **contradomínio da função**, ou conjunto de chegada. Outra forma de interpretar esses conjuntos é que o domínio é o conjunto no qual estão os valores possíveis para x , e o contradomínio é o conjunto que comporta os elementos que podem corresponder aos elementos do domínio.

Já a **imagem da função** exprime todos os elementos de B que estão de fato relacionados com os elementos de A. Vale ressaltar que não necessariamente a imagem da função é igual ao contradomínio.

Exemplo: considere uma função f de A em B, em que $A = \{0,1,2,3\}$ e $B = \{-1,0,1,2,3,4,5\}$, com a lei de formação $f(x) = x + 1$.

- **Determinando o conjunto do domínio.**

Os elementos de entrada dessa função são os elementos do conjunto $A = \{0,1,2,3\}$.

- **Determinando o conjunto imagem.**

Note que no exemplo acima se trata de uma função, já que cada elemento de A se relaciona a um único elemento de B. Como vimos antes, no domínio (A) estão os elementos de x . Logo, aplicando na lei de formação, temos:

$$f(0) = 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(2) = 2 + 1 = 3$$

$$f(3) = 3 + 1 = 4$$

Assim, o conjunto imagem é dado por $Im = \{1,2,3,4\}$.

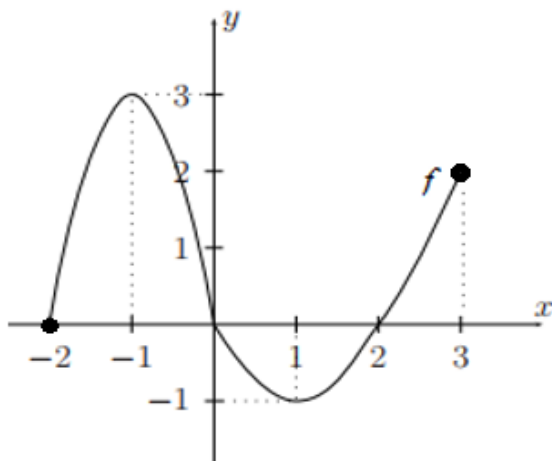
Destacamos que o conjunto imagem é um subconjunto do conjunto contradomínio.

Determinação do domínio e da imagem a partir do gráfico da função

O domínio da função corresponde aos valores de entrada de x . Graficamente, isso corresponde aos valores definidos no eixo x , o eixo das abscissas.

A imagem da função corresponde aos valores de saída de y . Graficamente, isso corresponde aos valores definidos no eixo y , o eixo das ordenadas.

Exemplo:

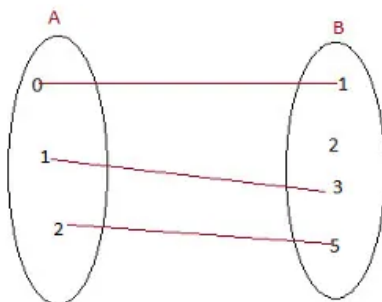


Descomplica ©

Aqui, o gráfico está definido no eixo x para valores de $x \in [-2; 3]$. Esse é o domínio da função. Além disso, o gráfico está definido no eixo y para valores de $y \in [-1; 3]$. Essa é a imagem da função.

Exercícios de fixação

1. Analise o diagrama abaixo e determine: o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem.

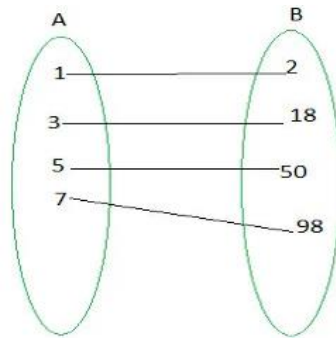


2. Dada a função $f(x) = 2x - 3$, o domínio $\{3, 4, 5\}$ e o contradomínio composto pelos naturais entre 1 e 10, qual das opções abaixo representa o conjunto imagem dessa função?
- (A) $\{3, 5, 7\}$.
(B) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
(C) $\{4, 6, 8\}$.
(D) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
(E) $\{1, 3, 8\}$.
3. Assinale a alternativa abaixo que apresenta um número que não pertence ao domínio da função:

$$f(x) = \sqrt{4x - 16}$$

- (A) 2.
(B) 4.
(C) 6.
(D) 8.
(E) 20.
4. Dada a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = x^2$. Determinar a imagem dessa função, dado que o domínio dessa função é $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

5. Marque a alternativa que representa a função abaixo:

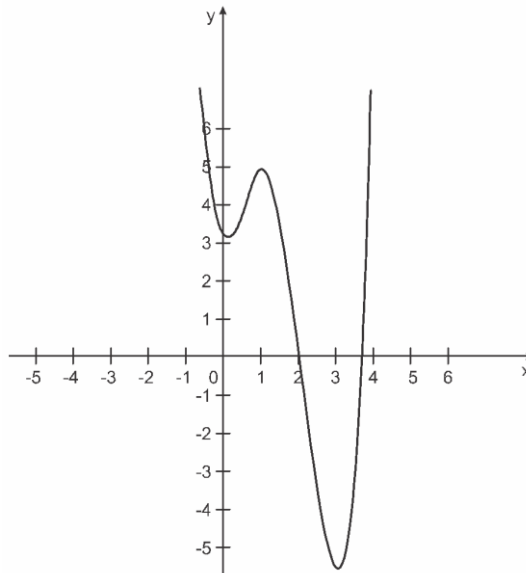


- (A) $f(x) = 2x + 2$.
- (B) $f(x) = x^2 + 2$.
- (C) $f(x) = 2x^2$.
- (D) $f(x) = -2x^2$.
- (E) $f(x) = x^2$.

Exercícios de vestibulares



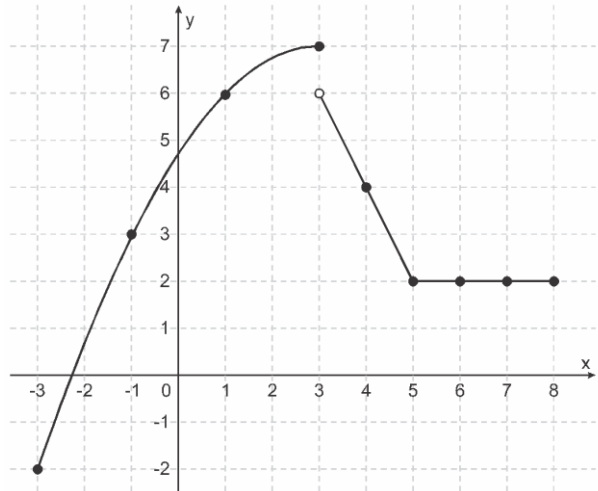
1. (FAAP - adaptada) Durante um programa nacional de imunização contra uma forma virulenta de gripe, representantes do ministério da Saúde constataram que o custo de vacinação de "x" por cento da população era de, aproximadamente, $f(x) = \frac{150x}{200-x}$ milhões de reais. O domínio da função f é:
- (A) todo número real x .
(B) todo número real x , exceto os positivos.
(C) todo número real x , exceto os negativos.
(D) todo número real x , exceto $x = 200$.
(E) todo número real x , exceto $x \geq 200$.
2. (Cefet-MG, 2020) O gráfico abaixo representa uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



Afirma-se, corretamente, que o número de raízes reais distintas no intervalo de $[0, 4]$ é igual a

- (A) 0.
(B) 1.
(C) 2.
(D) 3.
(E) 4.

3. (UFJF, 2019) No plano cartesiano abaixo está representado o gráfico da função $f: [-3, 8] \rightarrow [-2, 7]$, no qual os pontos pretos destacados são os pontos em que o gráfico passa sobre os cruzamentos da malha.



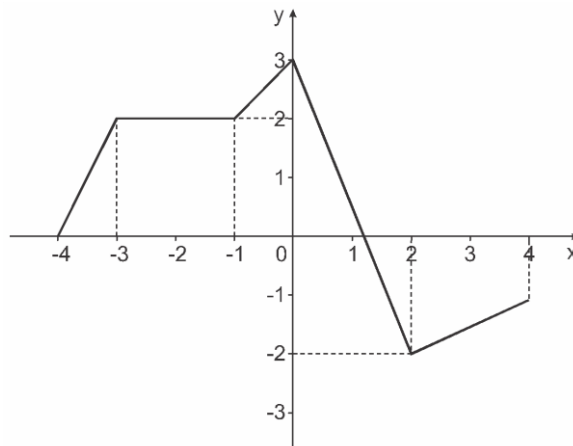
Seja $k = f(-3) + f(-1) + f(3) - f(4) + f(5)$.

O valor de x para o qual $f(x) = k$ é

- (A) 7.
- (B) 6.
- (C) 3.
- (D) 2.
- (E) 1.



4. (Cefet-MG, 2020) Considere o gráfico da função f definida no intervalo real $[-4, 4]$.



A partir do gráfico de f representado, afirma-se, corretamente, que essa função

- (A) não possui raízes reais.
- (B) é constante no intervalo $[-3, -1]$.
- (C) é crescente em todo intervalo $[-4, 0]$.
- (D) tem o conjunto imagem igual a $[-4, 4]$.

5. (Cefet-MG, 2012) Na função $f: \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = x^2 + 2x - 5$,
- (A) o domínio de $f(x)$ é \mathbb{Z} .
 - (B) a imagem de $x = -1$ é igual a -2 .
 - (C) o conjunto imagem de $f(x)$ é $\{0, 1, 2, 3\}$.
 - (D) o conjunto imagem de $f(x)$ é $\{-5, -2, 3, 10\}$.
6. (Eear, 2022) Seja uma função $f: A \rightarrow B$ tal que $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \mathbb{R}$. A alternativa que apresenta todos os pontos de um possível gráfico de f é
- (A) $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(0, 2)$; $(0, 3)$ e $(0, 4)$.
 - (B) $(0, 0)$; $(1, 0)$; $(2, 0)$; $(3, 0)$ e $(4, 0)$.
 - (C) $(0, 0)$; $(1, -1)$; $(2, -2)$ e $(3, -3)$.
 - (D) $(0, 1)$; $(2, 3)$; $(4, 5)$ e $(5, 6)$.

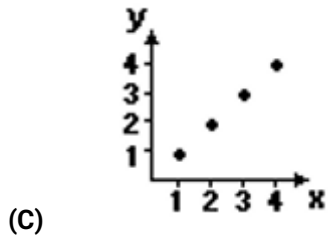
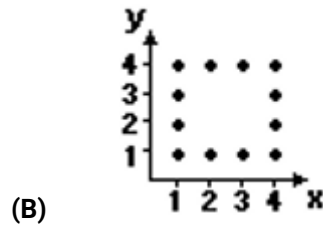
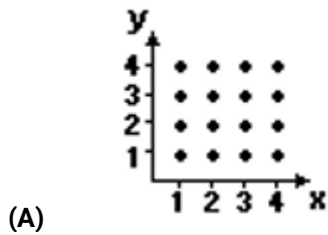
TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

As atividades de comunicação humana são plurais e estão intimamente ligadas às suas necessidades de sobrevivência. O problema de contagem, por exemplo, se confunde com a própria história humana no decorrer dos tempos. Assim como para os índios mundurucus, do sul do Pará, os waimiri-atroari, contam somente de um até cinco, adotando os seguintes vocábulos: awynimi é o número 1, typytyna é o 2, takynima é o 3, takyninapa é o 4, e, finalmente, warenipa é o 5.

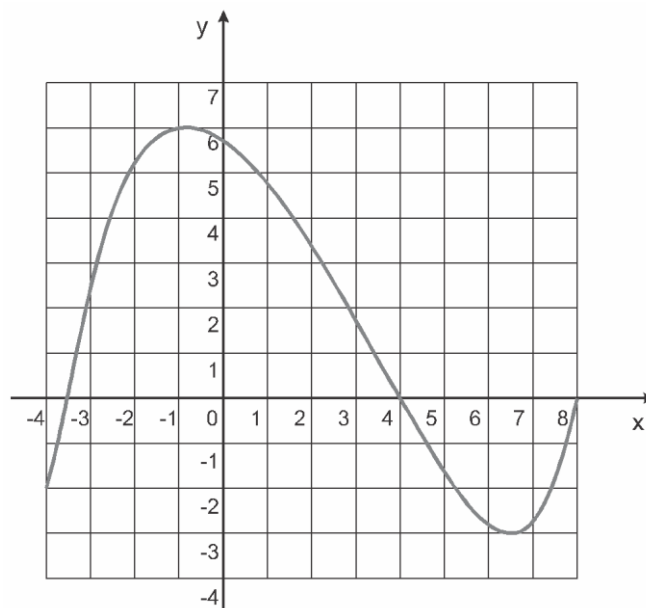
Texto Adaptado: Scientific American – Brasil, "Etnomatática". Edição Especial, Nº 11, ISSN 1679-5229

7. (Uepa, 2014) Considere A o conjunto formado pelos números utilizados no sistema de contagem dos waimiriatroari, ou seja, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Nestas condições, o número de elementos da relação $R_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid y \geq x\}$ (ou seja, o número de pares em que a coordenada y é maior ou igual a x) é igual a:
- (A) 5.
 - (B) 10.
 - (C) 15.
 - (D) 20.
 - (E) 25.
-

8. (UFRN, 2000) Considerando $K = \{1, 2, 3, 4\}$, marque a opção cuja figura representa o produto cartesiano $K \times K$.



9. (UPF, 2017) Observe a figura:



Ela representa o gráfico da função $y = f(x)$, que está definida no intervalo $[-4, 8]$. A respeito dessa função, é **correto** afirmar que

- (A) $f(3) > f(1)$.
- (B) $f(f(2)) > 2$.
- (C) $(f) = [-2, 6]$.
- (D) $f(x) = 0$, para $x = 8$.
- (E) O conjunto $\{-4 \leq x \leq 8 \mid f(x) = -1, 2\}$ tem exatamente 2 elementos.

10. (IFSC) Sistema de irrigação por Pivô Central

A divisão da área em piquetes tem sido realizada de formas diferentes. Algumas favorecem o manejo da pastagem e dos animais e outras favorecem o manejo da irrigação e da fertirrigação. É realmente difícil encontrar uma maneira que favoreça as duas situações. O que devemos fazer é analisarmos a situação e optarmos pela forma de dividir a área irrigada. A mais utilizada é a forma de pizza, como segue na ilustração ao lado, pois dentre outras coisas, favorece em muito o processo de fertirrigação. A área de lazer pode ser feita no centro ou na periferia do Pivô.

(Adaptado de: DRUMOND, Luis C. D. Irrigação de pastagens – in: II Simpósio Internacional de Produção de Gado de Corte. Disponível em: http://www.simcorte.com/index/Palestras/6_simcorte/simcorte12.pdf. Acesso: 08 out. 2013.)



Considerando que há 30 piquetes na ilustração da figura do texto, cada um deles é identificado com um número de 1 a 30 no sentido horário, o gado ocupa um único piquete por vez e é remanejado para o próximo piquete, em sentido horário a cada 2 meses, analise as seguintes afirmações feitas sobre a função que determina o número do piquete ocupado, em relação ao número de meses passados, após o início de funcionamento desse manejo.

- I. O número do piquete ocupado é o domínio dessa função.
- II. O número do mês é a imagem da função.
- III. Essa é uma função periódica, sendo seu domínio igual a 60 meses.

É CORRETO afirmar que:

- (A) Apenas a afirmação III é verdadeira.
- (B) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.
- (C) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.
- (D) Apenas a afirmação I é verdadeira.
- (E) Todas as afirmações são verdadeiras.

Se liga!

Sua específica é Matemáticas e quer continuar treinando esse conteúdo?
Clique aqui para fazer uma lista extra de exercícios.

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. Pelo diagrama, temos
Domínio: $D(f) = \{0, 1, 2\}$
Contradomínio: $CD(f) = \{1, 2, 3, 5\}$
Imagem: $Im(f) = \{1, 3, 5\}$
2. **A**
Para encontrar o conjunto imagem, temos que substituir os elementos do domínio na função:
 $f(x) = 2x - 3$
 $f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3$
 $f(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$
 $f(5) = 2 \cdot 5 - 3 = 10 - 3 = 7$
Logo, o conjunto imagem é dado por $Im = \{3, 5, 7\}$.
3. **A**
O conjunto que não pertence ao domínio é o conjunto dos valores negativos dentro da raiz, logo:
 $4x - 16 < 0$
 $4x < 16$
 $x < 4$
Qualquer valor menor que 4 não pertence ao domínio; assim, a alternativa certa é a **A**, pois $2 < 4$.
4. $Im = \{0, 1, 4\}$.
 $f(x) = x^2$
 $f(-2) = (-2)^2 = 4$
 $f(-1) = (-1)^2 = 1$
 $f(0) = 0^2 = 0$
 $f(1) = 1^2 = 1$
 $f(2) = 2^2 = 4$
5. **C**
A função é definida por $f(x) = 2x^2$, já que todos os valores da imagem são o dobro do quadrado dos do domínio.

Exercícios de vestibulares

1. **D**
Para analisar o domínio, não podemos ter absurdo como $\frac{1}{0}$; logo, analisamos onde o denominador zera, que é em $200 - x = 0$; assim, x não pode ser 200.
 2. **C**
Considerando que raízes são as abscissas dos pontos onde a função intersecta o eixo x , concluímos que, no intervalo $[0, 4]$, a função considerada possui 2 raízes, uma delas é $x = 2$ e a outra um número compreendido entre 3 e 4.
-

3. **E**

Calculando:

$$f(-3) = -2f(-1) = 3f(3) = 7f(4) = 4f(5) = 2k = f(-3) + f(-1) + f(3) - f(4) + f(5)$$

$$= -2 + 3 + 7 - 4 + 2 \Rightarrow k = 6$$

Para $f(x) = 6 \Rightarrow x = 1$

4. **B**

No intervalo $[-3, -1]$, o gráfico está representado por uma reta paralela ao eixo x , portanto a função é constante nesse intervalo.

5. **D**

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = -2$$

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 5 = 3$$

$$f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = 10$$

Logo, o conjunto imagem de $f(x)$ é $\{-5, -2, 3, 10\}$.

6. **B**

Dentre as alternativas, a que obedece aos pares ordenados possíveis é a **B**, pois representa corretamente o conjunto A em suas coordenadas.

7. **C**

É possível ver que o resultado pedido é dado por $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

8. **A**

Temos que marcar os pontos $(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4)$. Isso é visto na letra **A**.

9. **D**

(A) Falsa. Observando o gráfico, notamos que $f(3) < f(1)$.

(B) Falsa. Observando o gráfico, notamos que $3 < f(2) < 4$, logo $f(f(2)) < 2$.

(C) Falsa. O limite máximo do conjunto imagem é maior que 6.

(D) Verdadeira.

(E) Falsa. O conjunto $\{-4 \leq x \leq 8 | f(x) = -1, 2\}$ tem exatamente 3 elementos.

10. **A**

I. **Incorreto.** O domínio é o tempo para que um gado saia de um piquete e volte para ele.

II. **Incorreto.** A imagem da função é o mês em que o gado se encontra durante o confinamento.

III. **Correto.** É periódica pois se repete. O domínio é 60 meses, pois é o tempo para que um gado saia de um piquete e volte para ele.